ĐỀ THI HSG LỚP 9
QUẬN 3 – (2014-2015)

Thời gian: 150 phút
(NGÀY THI: 05/10/2014)

Bài 1:

a) Chứng minh $2\sqrt{a} > \sqrt{a+1} + \sqrt{a-1} \quad (a > 1)$

Áp dụng câu trên để so sánh A và B.

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{2013} + \sqrt{2011} + \sqrt{2009} + \sqrt{2007} + ... + \sqrt{3} + \sqrt{1}$$

$$B = \sqrt{2012} + \sqrt{2010} + \sqrt{2008} + ... + \sqrt{4} + \sqrt{2}$$

b) Tính $C = \sqrt{1 + 2013^2 + \frac{2013^2}{2014^2}} + \frac{2013}{2014}$

Bài 2: Giải phương trình và hệ phương trình

a) $2x\sqrt{x+2} + 15 = 3\sqrt{x+2} + 10x$

b) $\sqrt{\frac{x^2}{4} + \sqrt{x^2 - 4}} = 8 - x^2$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$

Bài 3: Cho x, y > 0 và x + y =1. Chứng minh rằng : $8\left(x^4 + y^4\right) + \frac{1}{xy} \ge 5$

Bài 4: Cho x, y > 0 và $x + y \le 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{3}{xy} + 2xy$

Bài 5: Cho $A\left(x\right) = x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120$

a) Phân tích A(x) ra nhân tử.

b) Chứng minh A(x) chia hết cho 24 với mọi x nguyên.

Bài 6: Cho ΔABC nhọn (AB < AC) đường cao AD. Gọi M, N theo thứ tự là điểm đối xứng của D qua AB, AC. Đoạn thẳng MD cắt AB tại E, ND cắt AC tại F, MN cắt AB, AC lần lượt tại I, K.

a) Chứng minh: $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$

b) Chứng minh: $S_{AEF} = S_{ABC}.\sin^2 B.\sin^2 C$

c) Chứng minh: B, C, K, I cùng thuộc 1 đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn này.

d) Biết $ABC = 60^0$; $ACB = 40^0$. Tính AOB

★ **HẾT** ★

HƯỚNG DẪN ĐỀ THI HSG LỚP 9 QUẬN 3-(2014-2015)

Bài 1:

a) Chứng minh $2\sqrt{a} > \sqrt{a+1} + \sqrt{a-1} \quad (a > 1)$

Áp dụng câu trên để so sánh A và B.

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{2013} + \sqrt{2011} + \sqrt{2009} + \sqrt{2007} + ... + \sqrt{3} + \sqrt{1}$$

$$B = \sqrt{2012} + \sqrt{2010} + \sqrt{2008} + ... + \sqrt{4} + \sqrt{2}$$

Ta có: $2\sqrt{a} > \sqrt{a+1} + \sqrt{a-1} \Leftrightarrow 4a > (a+1) + 2\sqrt{(a+1)(a-1)} + (a-1)$

$\Leftrightarrow 4a > 2a + 2\sqrt{(a+1)(a-1)} \Leftrightarrow a > \sqrt{a^2 - 1} \Leftrightarrow a^2 > a^2 - 1$ (bất đẳng thức đúng)

Áp dụng câu trên, ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{2013} > \sqrt{2012} \\ 2\sqrt{2011} > \sqrt{2012} + \sqrt{2010} \\ 2\sqrt{2009} > \sqrt{2010} + \sqrt{2008} \\ \text{...} \\ 2\sqrt{3} > \sqrt{4} + \sqrt{2} \\ 2\sqrt{1} > \sqrt{2} + \sqrt{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2013} + 2\left(\sqrt{2011} + \sqrt{2009} + ... + \sqrt{3} + \sqrt{1}\right) > 2\left(\sqrt{2012} + \sqrt{2010} + ... + \sqrt{4} + \sqrt{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2013} + \sqrt{2011} + \sqrt{2009} + \sqrt{2007} + ... + \sqrt{3} + \sqrt{1} > \sqrt{2012} + \sqrt{2010} + ... + \sqrt{4} + \sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow A > B$

b) Tính $C = \sqrt{1 + 2013^2 + \frac{2013^2}{2014^2}} + \frac{2013}{2014}$

$$C = \sqrt{1 + 2013^2 + \frac{2013^2}{2014^2}} + \frac{2013}{2014} = \sqrt{(1+2013)^2 - 2.2013 + \frac{2013^2}{2014^2}} + \frac{2013}{2014}$$

$$= \sqrt{(2014)^2 - 2.2014.\frac{2013}{2014} + \left(\frac{2013}{2014}\right)^2} + \frac{2013}{2014} = \sqrt{\left(2014 - \frac{2013}{2014}\right)^2} + \frac{2013}{2014}$$

$$= 2014 - \frac{2013}{2014} + \frac{2013}{2014} = 2014$$

Bài 2: Giải phương trình và hệ phương trình:

a) $2x\sqrt{x+2}+15=3\sqrt{x+2}+10x$

Điều kiện : $x\ge -2$

pt $\Leftrightarrow 2x\sqrt{x+2}-3\sqrt{x+2}+15-10x=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}(2x-3)-5(2x-3)=0$

$\Leftrightarrow (2x-3)\left(\sqrt{x+2}-5\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-3=0\\ \sqrt{x+2}-5=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\ (\text{nhận})\\ x=23\ (\text{nhận})\end{array}\right.$. **Vậy** $S=\left\{\dfrac{3}{2};23\right\}$

b) $\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+\sqrt{x^2-4}}=8-x^2$

Điều kiện : $x^2-4\ge 0\Leftrightarrow x^2\ge 4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le -2\end{array}\right.$

Cách 1 :

Đặt : $\sqrt{x^2-4}=y\,(y\ge 0)$. **Ta có :** $x^2-4=y^2\Leftrightarrow x^2=y^2+4$. **Phương trình trở thành :**

$\sqrt{\dfrac{y^2+4}{4}+y}=8-(y^2+4)\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{(y+2)^2}{4}}=4-y^2\Leftrightarrow \dfrac{y+2}{2}=4-y^2\Leftrightarrow y+2=8-2y^2$

$\Leftrightarrow 2y^2+y-6=0\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{2}(\text{nhận}),y=-2(\text{loại})$.

- **Với** $y=\dfrac{3}{2}\Rightarrow \sqrt{x^2-4}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\dfrac{3}{2}\ge 0\\ x^2-4=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{5}{2}$ **(nhận)**

Cách 2 :

Với điều kiện trên phương trình trở thành :

$\sqrt{x^2+4\sqrt{x^2-4}}=16-2x^2\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x^2-4}+2\right)^2}=16-2x^2$

$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x^2-4}+2\right|=16-2x^2\Leftrightarrow 2x^2-14+\sqrt{x^2-4}=0\left(\text{vì } \sqrt{x^2-4}+2>0\right)$

$\Leftrightarrow 2(x^2-4)+\sqrt{x^2-4}-6=0$

Đặt $t=\sqrt{x^2-4},(t\ge 0)$ **thì phương trình thành :**

$2t^2+t-6=0\Leftrightarrow (t+2)(2t-3)=0\Leftrightarrow 2t-3=0\,(\text{vì } t+2>0)$

$\Rightarrow 2\sqrt{x^2-4}=3\Leftrightarrow 4x^2-16=9\Leftrightarrow 4x^2=25$

$\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{5}{2}$ **(nhận)**

Vậy $S=\left\{\dfrac{5}{2};-\dfrac{5}{2}\right\}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 & (1) \\ \sqrt{x+y}=x^2-y & (2) \end{cases}$

Điều kiện : x + y > 0 và $x^2-y\ge 0$

(1) $\Leftrightarrow (x+y)(x^2+y^2)+2xy=x+y$

$\Leftrightarrow (x+y)\left[(x+y)^2-2xy\right]+2xy=x+y$

$\Leftrightarrow (x+y)^3-2xy(x+y)+2xy-(x+y)=0$

$\Leftrightarrow (x+y)\left[(x+y)^2-1\right]-2xy(x+y-1)=0$

$\Leftrightarrow (x+y)(x+y-1)(x+y+1)-2xy(x+y-1)=0$

$\Leftrightarrow (x+y-1)\left[(x+y)(x+y+1)-2xy\right]=0$

$\Leftrightarrow (x+y-1)(x^2+y^2+x+y)=0$

$\Leftrightarrow x+y-1=0 \ \left(\text{do } x+y>0 \text{nên } x^2+y^2+x+y>0\right)$

$\Leftrightarrow x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x$

thế vào (2), ta được:

$\sqrt{1}=x^2-(1-x)\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=-2$ **hay** $x=1$

Khi x = -2 thì y = 1 –(- 2) = 3 (nhận) vì thỏa $x^2-y\ge 0$

Khi x = 1 thì y = 1 – (1) = 0 (nhận) vì thỏa $x^2-y\ge 0$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (x ;y) = (-2;3) ,(1;0)

<u>Bài 3:</u> Cho x, y > 0 và x + y =1. Chứng minh rằng : $8\left(x^4+y^4\right)+\dfrac{1}{xy}\ge 5$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có:

$x+y\ge 2\sqrt{xy}$ **mà** $x+y=1$ **nên** $1\ge 2\sqrt{xy}\Leftrightarrow 1\ge 4xy\Leftrightarrow \dfrac{1}{xy}\ge 4 \quad (1)$

Áp dụng bất đẳng thức $a^2+b^2\ge\dfrac{(a+b)^2}{2}$**, ta có:**

$$x^4+y^4\ge\frac{(x^2+y^2)^2}{2}\ge\frac{\left[\dfrac{(x+y)^2}{2}\right]^2}{2}=\frac{(x+y)^4}{8}=\frac{1}{8}$$

$\Leftrightarrow 8\left(x^4+y^4\right)\ge 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2), ta có: $8\left(x^4+y^4\right)+\dfrac{1}{xy}\ge 5$

<u>Bài 4:</u> Cho x, y > 0 và $x+y\le 2$**. Tìm giá trị nhỏ nhất của** $A=\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{3}{xy}+2xy$

$$A=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{3}{xy}+2xy=\left(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}\right)+\left(\frac{2}{xy}+2xy\right)+\frac{1}{2xy}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$, ta có:

$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}\ge\frac{4}{(x+y)^2}$, mà $x+y\le 2$ nên $\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}\ge\frac{4}{(2)^2}=1 \quad (1)$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có:

$\frac{2}{xy}+2xy\ge 2\sqrt{\frac{2}{xy}\cdot 2xy}\Leftrightarrow\frac{2}{xy}+2xy\ge 4 \quad (2)$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có:

$x+y\ge 2\sqrt{xy}$ mà $x+y\le 2$ nên $2\ge 2\sqrt{xy}\Leftrightarrow 1\ge xy\Leftrightarrow\frac{1}{2xy}\ge\frac{1}{2} \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3), ta có:

$$\left(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}\right)+\left(\frac{2}{xy}+2xy\right)+\frac{1}{2xy}\ge 1+4+\frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow A\ge\frac{11}{2}$. Vậy $A_{min}=\frac{11}{2}$ khi x = y = 1.

Bài 5:
a) $A(x)=x^4-14x^3+71x^2-154x+120$

$$=x^4-2x^3-12x^3+24x^2+47x^2-94x-60x+120$$
$$=x^3(x-2)-12x^2(x-2)+47x(x-2)-60(x-2)$$
$$=(x-2)(x^3-12x^2+47x-60)$$
$$=(x-2)(x^3-3x^2-9x^2+27x+20x-60)$$
$$=(x-2)\left[x^2(x-3)-9x(x-3)+20(x-3)\right]$$
$$=(x-2)(x-3)(x^2-9x+20)$$
$$=(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

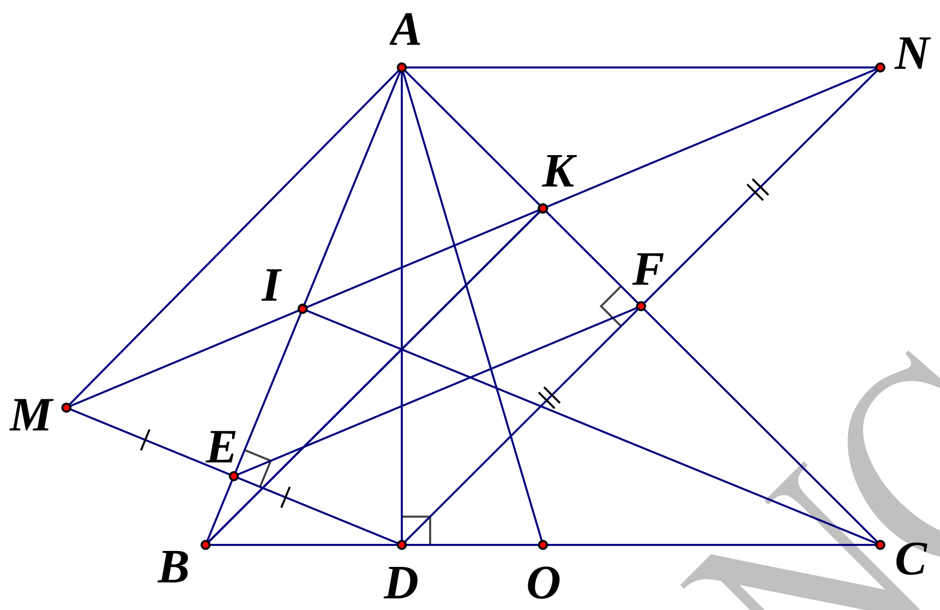
b) Chứng minh A(x) chia hết cho 24 với mọi x nguyên.

Ta có: $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$ là tích của 4 số nguyen liên tiếp nên có ít nhất 1 số chia hết cho 3 ; và trong đó có tích của 2 số chẵn liên tiếp nên chia hết cho 8.

Mà ƯCLN(3;8) = 1. Nên $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\,\vdots\,3.8\Rightarrow(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\,\vdots\,24$

Vậy $A(x)\,\vdots\,24$ với mọi x nguyên.

Bài 6: Cho ΔABC nhọn (AB < AC) đường cao AD. Gọi M, N theo thứ tự là điểm đối xứng của D qua AB, AC. Đoạn thẳng MD cắt AB tại E, ND cắt AC tại F, MN cắt AB, AC lần lượt tại I, K.



a) Chứng minh: $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$

Ta có : $\begin{cases} AD^2 = AE.AB \ (...) \\ AD^2 = AF.AC \ (...) \end{cases} \Rightarrow AE.AB = AF.AC \Rightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AF}{AB}$

Xét ΔAEF và ΔACB, ta có:

$\begin{cases} EAF = BAC(\text{góc chung}) \\ \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AF}{AB} \ (\text{cmt}) \end{cases} \Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ACB(c-g-c)$

b) Chứng minh: $S_{AEF} = S_{ABC}.\sin^2 B.\sin^2 C$

$\Delta AEF \backsim \Delta ACB \Rightarrow \dfrac{S_{AEF}}{S_{ACB}} = \left(\dfrac{AE}{AD}\right)^2 \quad (1)$

Ta có: $\begin{cases} \sin ADE = \dfrac{AE}{AD} \\ \sin ACD = \dfrac{AD}{AC} \end{cases} \Rightarrow \sin ADE.\sin ACD = \dfrac{AE}{AD} \cdot \dfrac{AD}{AC}$

$\Rightarrow \sin ADE.\sin ACD = \dfrac{AE}{AC} \Rightarrow \sin^2 ADE.\sin^2 ACD = \left(\dfrac{AE}{AC}\right)^2$

Mà $\begin{cases} ADE = B(\text{cùng phụ BDE}) \\ ACD = C \end{cases}$ nên $\sin^2 B.\sin^2 C = \left(\dfrac{AE}{AC}\right)^2 \quad (2)$

Từ (1) và (2), ta có: $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ACB}} = \sin^2 B.\sin^2 C \Rightarrow S_{AEF} = S_{ACB}.\sin^2 B.\sin^2 C$

c) Chứng minh: B, C, K, I cùng thuộc 1 đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn này.

Xét ΔAMN, ta có: AM = AN (vì = AD)

$\Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A $\Rightarrow AMN = ANM$ mà $\begin{cases} AMN = ADI\ (...) \\ ANM = ADK\ (...) \end{cases}$ nên $ADI = ADK$

$\Rightarrow$ DA là tia phân giác của IDK

Mà $DB \perp DA$ nên DB là tia phân giác ngoài của ΔDIK

Xét ΔDIK, ta có:

$\begin{cases} \text{IB là tia phân ngoài đỉnh I của } \Delta DIK \\ \text{DB là tia phân ngoài đỉnh D của } \Delta DIK \\ \text{IB và DB cắt nhau tại B.} \end{cases}$

$\Rightarrow$ KB là tia phân giác của IKD. $\Rightarrow BKD = \frac{1}{2} IKD$

Mà $CKD = \frac{1}{2} NKD(....)$ nên $BKD + CKD = \frac{1}{2}(IKD + NKD) \Rightarrow BKC = \frac{1}{2}(IKD + NKD)$

mặt khác $IKD + NKD = 180^0$ (2 góc kề bù) nên $BKC = 90^0 \Rightarrow \Delta KBC$ vuông tại K.

$\Rightarrow K \in$ đường tròn đường kính BC (1)

Cmtt, ta có ΔIBC vuông tại I. $\Rightarrow I \in$ đường tròn đường kính BC (2)

Từ (1) và (2), ta có: B, C, K, I $\in$ đường tròn đường kính BC

$\Rightarrow$ tâm O của đường tròn ngoại tiếp là trung điểm của BC.

d) Biết $ABC = 60^0$; $ACB = 40^0$. Tính AOB

Đặt BD = a, a > 0

Ta tính được $AB = 2a; AD = a\sqrt{3}$.

Ta có: $\tan ACD = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \tan 40^0 = \frac{a\sqrt{3}}{DC} \Rightarrow DC \approx 2,06a$

Do đó: $BC = BD + DC = a + 2,06a = 3,06a \Rightarrow BO = \frac{BC}{2} = 1,53a$.

Ta chứng minh được điểm D nằm giữa 2 điểm B và O.

$\Rightarrow DO + BD = OB \Rightarrow OD + a = 1,53a \Rightarrow OD = 0,53a$

Xét ΔDAO vuông tại D, ta có:

$\tan AOD = \frac{AD}{OD} \Rightarrow \tan AOD = \frac{a\sqrt{3}}{0,53a} \approx 3,27 \Rightarrow AOD \approx 72^0 59' \Rightarrow AOB \approx 72^0 59'$

★ HẾT ★